Ejercicios (Sucesiones y series de funciones)

9.1. Hallar el límite puntual de las siguientes sucesiones de funciones. Decidir en cada caso si la convergencia es uniforme o solo puntual.

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, en $[0, \infty)$ y en $x \in [0, a]$, $a > 0$.

b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, en $\mathbb{R}$, en $[0, \infty)$ y en $[a, \infty)$, $a > 0$.

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, en $[0, \infty)$ y en $[a, \infty)$, $a > 0$.

d) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, en $[0, \infty)$, en $[0, 1]$ y en $[0, a]$, $0 < a < 1$.

e) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{1+nx}$, en $[0, \infty)$ y en $[0, a]$, $a > 0$.

f) $f_n(x) = \arctan nx$, en $\mathbb{R}$, en $[0, \infty)$ y en $[a, \infty)$, $a > 0$.

g) $f_n(x) = e^{-nx}$, en $\mathbb{R}$, en $[0, \infty)$ y en $[a, \infty)$.

h) $f_n(x) = xe^{-nx}$, en $\mathbb{R}$ y en $[0, \infty)$.

i) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, en $\mathbb{R}$ y en $[0, \infty)$.

j) $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, en $\mathbb{R}$, en $[0, \infty)$ y en $[a, \infty)$, $a > 0$.

9.2. Supóngase que (f_n) es una sucesión de funciones continuas en un intervalo I que converge de manera uniforme a una función f en I. Si (x_n) es una sucesión en I que converge a un punto $c \in I$, probar que $\lim_n f_n(x_n) = f(c)$.

9.3. Definamos dos sucesiones de funciones (f_n) y (g_n) por

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = 0 \text{ o } x \notin \mathbb{Q}, \\ q + \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \mathrm{m.c.d.}\{p, q\} = 1. \end{cases}$$

Sea $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$.

a) Probar que tanto (f_n) como (g_n) convergen uniformemente en cada intervalo acotado.

b) Probar que (h_n) no converge uniformemente en ningún intervalo acotado.

9.4. Estudiar la convergencia uniforme de las siguientes series de funciones:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ en $[-1, 1]$ y en $[0, \infty)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ en $[0, 1]$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ en $(0, \infty)$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$, en $[0, 1]$ y en $[1, \infty)$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ en todo $\mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ en $[1/3, 2]$.

9.5. Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, probar que la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ converge uniformemente en $[0, \infty)$. Utilizar esto para probar que

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

9.6. Probar que si los términos f_n de una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ son todos monótonos en un intervalo cerrado y acotado, entonces dicha serie converge absoluta y uniformemente en dicho intervalo.

9.7. Investigar el dominio y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

9.8. Probar que la función Zeta de Riemann, definida en $(1, \infty)$ por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

es derivable en todo su dominio. Probar que para todo $x > 1$ la derivada en x se puede expresar en la forma

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}.$$

Obtener una forma similar para la derivada k-ésima de ζ.

9.9. Probar que

$$\lim_n \int_1^2 e^{-nx^2}\, dx = 0.$$

9.10. Si $a > 0$, probar que

$$\lim_n \int_0^a \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\, dx = 0.$$

¿Qué sucede si $a = 0$?

9.11. Sea

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}, \qquad x \in [0, 1].$$

Probar que (f_n) converge puntualmente a una función integrable f y no lo hace uniformemente, pero que, sin embargo,

$$\int_0^1 f = \lim_n \int_0^1 f_n.$$

9.12. Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en $[0, 1]$ y supóngase que (f_n) converge a f uniformemente. Discutir si es cierto o no que

$$\lim_n \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$